



**HAL**  
open science

# Modélisation analytique des phénomènes d'interaction sol-structure

Bakri Basmaji, Olivier Deck, Marwan Al Heib

► **To cite this version:**

Bakri Basmaji, Olivier Deck, Marwan Al Heib. Modélisation analytique des phénomènes d'interaction sol-structure. 7. Journées Nationales de Géotechnique et de Géologie de l'ingénieur (JNGG 2014) "Observer, modéliser, décider", Jul 2014, Beauvais, France. ineris-01863828

**HAL Id: ineris-01863828**

**<https://ineris.hal.science/ineris-01863828>**

Submitted on 29 Aug 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **MODELISATION ANALYTIQUE DES PHENOMENES D'INTERACTION SOL-STRUCTURE**

### **ANALYTICAL MODEL OF THE PHENOMEN OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION**

Bakri BASMAJI<sup>1</sup>, Olivier DECK<sup>2</sup>, Marwan AL HEIB<sup>3</sup>

*1 Georessouces, – Université Lorraine, Bakri.BASMAJI@gmail.com*

*2 Georessouces –Lorraine University, olivier.deck@univ-lorraine.*

*3 INERIS –, Marwan.ALHEIB@ineris.fr.*

**RÉSUMÉ** — Cet article a pour objectif de développer un modèle analytique permettant de prévoir la déflexion d'un bâtiment induite par un mouvement de terrain en prenant en compte la rigidité relative entre le sol et le bâtiment (interaction sol-structure). Un objectif spécifique est d'étudier l'influence de la prise en compte du cisaillement de sol sur la déflexion finale du bâtiment. Le sol est modélisé avec un modèle à un paramètre (modèle de Winkler) ou deux paramètres (modèle de Pasternak). Le bâtiment est modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli avec une charge uniforme reposant sur un sol qui subit la courbure du terrain qui reproduit les déplacements en champ libre du terrain. L'équilibre statique et cinématique du terrain et du bâtiment sont alors calculés pour évaluer la situation d'équilibre final dont on déduit la déflexion finale du bâtiment. Les études de sensibilité permettent alors de montrer le rôle déterminant de la prise en compte des déformations associées au cisaillement. Une section est dédiée au calcul des paramètres des modèles de sol en fonction des propriétés élastiques.

**ABSTRACT** — This paper aims to develop an analytical model which can predict the building-relevant deflections induced by a subsidence by taking into account the relative stiffness between the ground and the building (soil-structure interaction). A specific objective is to study the influence of shear deformations in the ground over the final building deflection. The soil is then alternatively modeled with the Winkler one-parameter model or the Pasternak two parameters model and the building is alternatively modeled with a Euler-Bernoulli beam with uniform load and lying upon an initial ground curvature equivalent to the free field ground movements. The static and cinematic equilibrium of both the ground and the building are then calculated to assess the final building and ground shape, and the building deflection is then calculated. Results show a significant influence of the shear deformation. A section is dedicated to the determination of the parameters values of the soil model in relation to the elastic mechanical properties of the ground.

## 1. Introduction

Les bâtiments sont des structures susceptibles d'être endommagées lorsque leur terrain d'assise subit des mouvements (retrait-gonflement, affaissement minier, influence d'une excavation...). Les méthodes mises en œuvre pour étudier le comportement des ouvrages et leur vulnérabilité en zone de mouvement de terrains sont de quatre natures : empiriques, analytiques, numériques et expérimentales.

Les méthodes analytiques sont basées sur une modélisation des structures par une poutre ou un ensemble de poutres, au sens de la Résistance des Matériaux. Ces méthodes, initiées par Burland et Wroth (1974) ont fait l'objet d'un grand nombre de développements (Boscardin et Cording 1989, Boone 1996 et 2001, Finno et al. 2005). Le principe général est décrit sur la Figure 1. Il consiste à supposer que le bâti subira une déflexion  $\Delta$  assimilable à la flèche d'une poutre en flexion simple et d'obtenir une relation entre l'intensité des déformations maximales dans la structure et le tassement différentiel  $\Delta$ . L'utilisation de valeurs seuils sur la déformation maximale dans la structure permet alors d'associer un niveau de dommage à chaque valeur de  $\Delta$ . Cette approche permet de justifier analytiquement des valeurs seuils de  $\Delta$  empiriques. Néanmoins, son application dans un contexte de prévision des dommages provoqués par un mouvement de terrain d'intensité donnée, soulève une grande difficulté. Il convient en effet d'évaluer d'abord la déflexion du bâti  $\Delta$  en fonction de mouvement en champ libre  $\Delta_0$ .

Les différentes approches proposées pour étudier le comportement des ouvrages et leur vulnérabilité en zone de mouvement de terrains mettent en évidence la nécessité de distinguer deux mouvements du terrain :

Le mouvement en champ libre  $\Delta_0$  qui caractérise le mouvement subi par le terrain en l'absence de toute interaction avec un ouvrage, elle correspond à la déflexion maximale que le bâti est susceptible de subir sous l'hypothèse que la totalité du mouvement du terrain lui est transmise. Il existe une relation géométrique entre la courbure du terrain, la déflexion et la longueur du bâtiment (Burland et Wroth 1974, Kratzsch 1983) :

$$\Delta_0 = L^2/8R \quad (1)$$

La déflexion transmise au bâti  $\Delta$  qui peut être significativement inférieure au déplacement en champ libre compte tenu des phénomènes d'interaction sol-structure et surtout pour des structures rigides.

Calculer la valeur de  $\Delta$  est assez difficile. Même si la modélisation analytique ne permet pas de prendre en compte des configurations complexes, au contraire de modèles numériques, elle permet d'obtenir rapidement des résultats pour une plage de variation importante des paramètres du modèle. En outre les modèles analytiques permettent plus aisément de faire des études de sensibilité.

Deck et Singh (2010) ont utilisé un modèle analytique basé sur le modèle de Winkler pour calculer le taux de transmission de la déflexion  $\Delta/\Delta_0$ . Les résultats obtenus peuvent se représenter sous la forme d'une courbe reliant le taux de transmission de la déflexion en fonction de la rigidité relative en flexion (Figure 2 et Equ.2).

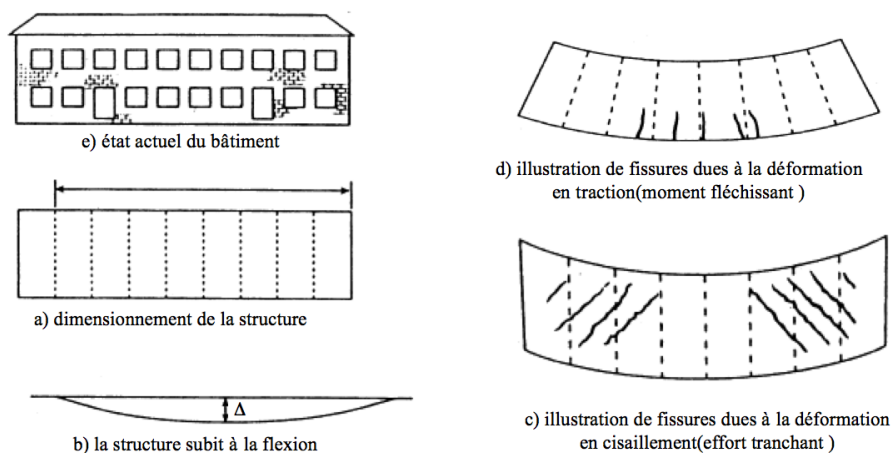


Figure 1. Modélisation d'un bâtiment par une poutre selon Burland and Wroth (1974)

Deck et Singh (2010) ont comparé leurs résultats analytiques à des résultats numériques, la comparaison montrait des différences qui pouvaient s'expliquer par l'utilisation d'un modèle trop simple du terrain et de la structure

$$\rho^* = \frac{EI}{K_w BL^4} \quad (2)$$

avec  $K_w$  le module de réaction du sol [Pa/m] (modèle de Winkler),  $EI$  la rigidité à la flexion de la poutre ( $E$  : module de Young du bâti et  $I$  le moment d'inertie),  $B$  la largeur du bâti,  $L$  la longueur du bâtiment. Goh et Maire (2011) ont défini une mesure différente de la rigidité relative (Equ.3).

$$\rho_1^* = \frac{EI}{8E_t \cdot BL^3} \quad (3)$$

Et : le module de Young du sol (Equ 3) sera utilisé dans cet article pour présenter et comparer les résultats obtenus selon le modèle de sol utilisé (Winkler ou Pasternak). Dans les paragraphes suivants, on développe un modèle analytique, proche du modèle de Deck et Singh (2010) afin de tenir compte de l'influence de cisaillement du terrain pour améliorer l'évaluation du taux de transmission de la déflexion. Ces développements consistent à modéliser le comportement du sol avec le modèle de Pasternak en remplacement du modèle de Winkler.

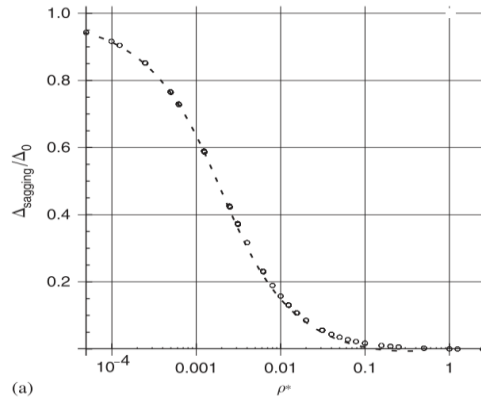


Figure 2: Taux de transmission maximal de la déflexion en fonction du coefficient de la rigidité relative en flexion (Deck et Singh 2010)

## 2. Le modèle analytique développé

Le modèle analytique initialement développé par Deck et Singh (2010) consiste à rechercher la position d'équilibre d'une poutre élastique de longueur  $L$ , hauteur  $H$ , largeur  $B$  et de module de Young  $E$ , reposant sur un terrain initialement courbe décrit par une équation  $v(x)$  et modélisé par des éléments de Winkler. La poutre est sollicitée par une charge verticale uniforme  $q$  et la distribution  $p(x)$  correspond à la réaction du sol. L'utilisation du modèle de Winkler présente des inconvénients comme le choix du coefficient de raideur  $K_w$ , et les discontinuités de déplacement du terrain que ce modèle provoque.

Le modèle présenté ici a été développé en utilisant le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle  $G_p$  du sol en plus de la rigidité normale  $K_p$ . Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

Le comportement du bâtiment, modélisé par une poutre, est traduit par l'Equation 4. Cette équation ne considère pas l'influence du cisaillement du bâti sur la déformée.

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{EI} \quad (4)$$

Avec :  $y''(x)$  la déformée du bâti,  $M(x)$  le moment fléchissant et  $EI$  la rigidité en flexion. Avec le modèle de Pasternak, la relation reliant la charge appliquée  $p(x)$  sur le sol au déplacement vertical  $w(x)$  du sol est exprimée par la formule suivante :

$$p(x) = k_p \cdot B \cdot w(x) - G_p \cdot B \cdot w''(x) \quad (5)$$

Avec  $p(x)$  [N/m] la charge linéique s'appliquant sur une largeur  $B$  de la poutre,  $G_p$  le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m],  $K_p$  le module de réaction du sol [Pa/m] et  $w(x)$  la déformée du terrain.

Lorsque  $G_p$  est nul, le modèle de Pasternak est identique au modèle de Winkler. On utilisera alors la notation  $K_w$  pour le module de réaction du sol [Pa/m]. Il est important de souligner ici qu'un même sol modélisé par un modèle de Winkler ou de Pasternak aura des modules  $K_p$  et  $K_w$  différents, dès lors que  $G_p$  est non nul (cf. section suivante).

La condition de non interpénétration du sol et du bâti impose une relation entre la déformée du bâti  $y''(x)$ , la déformée du sol  $w(x)$ , la déformée initiale du terrain  $v(x)$  et le déplacement de corps rigide du bâti  $d$  (Equ.6 et Figure 3).

$$y(x) = w(x) - d + v(x) \quad (6)$$

$v(x)$  correspond à la forme de courbure initiale du terrain. Un modèle parabolique est choisi pour introduire le tassement différentiel du terrain en champs libre  $\Delta_0$  (Equ.7).

$$v(x) = \Delta_0 \cdot \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \quad (7)$$

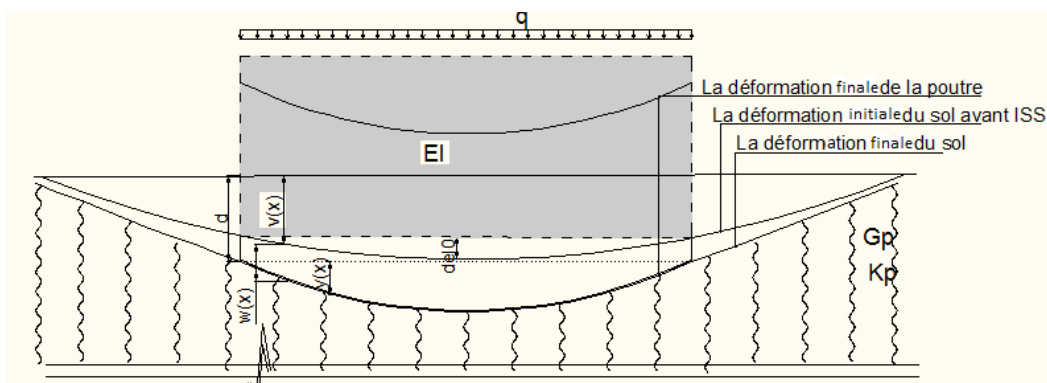


Figure 3: Différents mouvements du terrain et du bâti pour étudier l'influence d'une courbure initiale du terrain  $v(x)$  sur la déformée finale du bâti  $y(x)$

Le mouvement de corps rigide  $d$  est donc égal à  $w(L/2)$  et la déflexion finale du bâti  $\Delta$  est égale à  $y(0)$ . L'association du modèle de Pasternak (Equ 5), de l'équation différentielle du bâti (Equ. 4) et de la condition de non interpénétration (Equ. 6) permet d'aboutir à l'équation différentielle caractéristique du système (Equ.8).

$$EI.w^4(x) - G_p.B.w''(x) + K_p.B.w(x) = q \quad (8)$$

La solution analytique est exprimée par l'équation 9 qui doit être complétée par 4 conditions aux limites afin de calculer les constantes d'intégration.

$$\begin{aligned}
 \text{If } \frac{G_p \cdot \lambda^2}{K_p} < 1 &\Rightarrow w(x) = \frac{q}{K_p} + (c_1 \cdot e^{\mu \cdot \lambda \cdot x} + c_2 \cdot e^{-\mu \cdot \lambda \cdot x}) \cdot \cos(\beta \cdot \lambda \cdot x) + (c_3 \cdot e^{\mu \cdot \lambda \cdot x} + c_4 \cdot e^{-\mu \cdot \lambda \cdot x}) \cdot \sin(\beta \cdot \lambda \cdot x) \\
 \text{If } \frac{G_p \cdot \lambda^2}{K_p} > 1 &\Rightarrow w(x) = \frac{q}{K_p} + c_1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha}} + c_2 \cdot e^{\sqrt{\alpha}} + c_3 \cdot e^{-\sqrt{\gamma}} + c_4 \cdot e^{\sqrt{\gamma}} \\
 \lambda &= \sqrt[4]{\frac{K_p}{4EI}}, \quad \mu = \sqrt{1 + \frac{G_p \cdot \lambda^2}{K_p}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{G_p \cdot \lambda^2}{K_p}} \\
 \alpha &= \frac{G_p}{2EI} - \frac{\sqrt{G_p^2 - 4EI \cdot K_p}}{2EI}, \quad \gamma = \frac{G_p}{2EI} + \frac{\sqrt{G_p^2 - 4EI \cdot K_p}}{2EI}
 \end{aligned} \tag{9}$$

L'équation du mouvement du terrain en dehors du bâti est exprimée par l'équation 10

$$w_1(x) = c_5 e^{-\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} x} \tag{10}$$

En raison de symétrie  $c_1 = c_2$ ,  $c_3 = -c_4$ , Il reste 4 inconnues ( $c_1$ ,  $c_3$ ,  $c_5$ ,  $d$ ), Les 4 conditions aux limites nécessaires pour trouver les 4 inconnus sont :

- Une déflexion nulle de la poutre à ses extrémités :  $y(L/2) = 0$ .
- Un moment fléchissant nul aux extrémités de la poutre  $y''(L/2) = 0$ .
- La continuité du déplacement du terrain sous et hors la poutre.
- Les efforts tranchants aux extrémités de la poutre égaux aux forces locales  
 $F = G_p \cdot (w_1'(L/2) - w'(L/2))$

### 3. Développement d'une méthodologie pour le choix des paramètres de sol (paramètres de Winkler et Pasternak)

Le modèle analytique présenté nécessite d'utiliser des paramètres du terrain pertinents. Néanmoins, il n'existe pas de relation théorique exacte entre les valeurs des paramètres de Pasternak  $K_p$ ,  $G_p$  et les propriétés élastiques du terrain (module de Young et coefficient de Poisson). La méthodologie de choix des paramètres est basée sur une comparaison des résultats de tassements obtenus par les modèles analytiques de Winkler ou Pasternak et les solutions théoriques issues de l'étude du comportement des milieux semi-infinis (modèles de Boussinesq et Flamant).

Boussinesq (1885) a calculé le déplacement vertical généré par une force appliquée  $p$  à une surface limitée d'un milieu élastique semi-infini défini par son module de Young  $E$  et son coefficient de poisson  $\nu$ .

$$u_z(x, y, z) = \frac{2(1 + \nu)p}{4\pi E \sqrt{y^2 + x^2 + z^2}} \left( 2(1 - \nu) + \frac{z^2}{y^2 + x^2 + z^2} \right) \tag{11}$$

Pour une couche de terrain compressible d'épaisseur finie  $h$ , le déplacement du terrain à la surface peut être approximé par l'équation (12) qui correspond à la différence de tassements calculée à la surface et à la profondeur  $h$  :

$$uz_1(x, y) = uz(x, y, 0) - uz(x, y, h) \quad (12)$$

Flamant (1892) utilise la relation de Boussinesq pour calculer le tassement induit par une charge linéique infinie selon la direction y. Ce déplacement  $uz_2$  est obtenu par intégration de la solution de Boussinesq (Equ. 11) pour y variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Le déplacement du terrain sous une pression répartie de largeur  $2b$  selon la direction x et infinie selon la direction y est obtenue en intégrant l'équation de Flamant entre  $-b$  et  $+b$ .

$$uz_3(x, h) = \int_{x-b}^{x+b} uz_2(u, h) du \quad (13)$$

La méthodologie développée pour définir les valeurs numériques des paramètres du terrain ( $K_p$  et  $G_p$  du modèle de Pasternak) est basée sur l'ajustement entre les résultats théoriques (Equ.13) et la solution obtenue par le modèle de Pasternak pour une charge appliquée sur une surface de largeur  $2b$  appliquée sur le terrain.

L'Equation 14 correspond à la solution de Pasternak obtenue par résolution de l'équation 5 pour  $p(x) = p$  constant.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \leq b, \quad w_{Pasternak}(x) &= \frac{p}{k} + (e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} x} + e^{\sqrt{\frac{k}{G}} x}) * \frac{-p}{k} \frac{1}{2e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} b}} \\ \text{Si } x > b, \quad w_{Pasternak}(x) &= e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} x} \left( \frac{p}{k} \frac{1}{2e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} b}} \right) \left( \frac{e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} b}}{e^{\sqrt{\frac{k_p}{G_p}} b}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Les deux équations 13 et 14 correspondant respectivement au tassement prédit par le modèle de Flamant ou le modèle de Pasternak, sont différentes. Il est possible de calculer les paramètres  $K_p$  et  $G_p$  en imposant l'égalité de ces deux équations pour des abscisses particulières. On impose par exemple que les déplacements obtenus à partir de ces deux modèles soient les mêmes aux abscisses  $x = 0$  (centre de la charge) et  $x = b$  (extrémité de la charge).

On obtient donc deux équations à deux inconnues ( $K_p$  et  $G_p$ ). Les valeurs de  $K_p$  et  $G_p$  sont indépendantes de l'intensité de la charge. Les solutions sont exprimées par des abaques (Figure 5), pour un module de Young du terrain égal 1 MPa. Pour d'autres valeurs du module de Young du terrain, il convient de multiplier les valeurs de  $K_p$  et  $G_p$  fournies dans les abaques, par le module de Young du terrain (Equ 15, Equ 16).

$$K_p(Et) = K_p \cdot Et \quad (15)$$



$$G_p(E_t) = G_p \cdot E_t \quad (16)$$

On utilise la même méthode pour trouver le module de réaction du sol  $K_w$  pour le modèle de Winkler. Dans ce cas, on cherche la valeur de  $K_w$  permettant d'obtenir un tassement moyen sous la charge identique entre le modèle de Flamant et le modèle de Winkler.

$$w_{\text{Winkler}}(0) = w_{\text{Winkler}}(b) = (u_z(0) + u_z(b))/2 \quad (17)$$

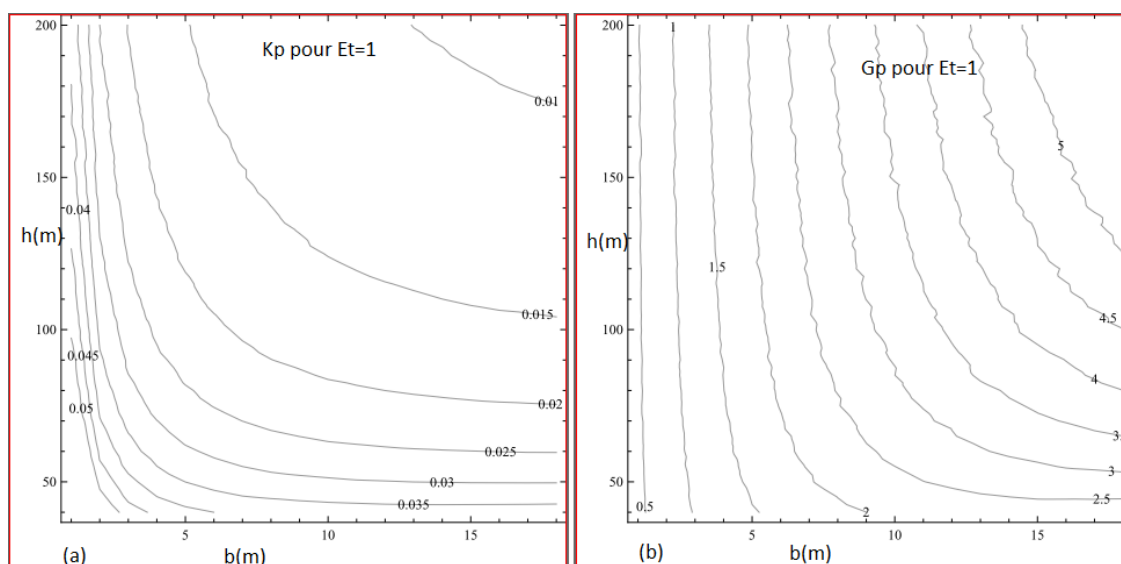


Figure 4: (a) Abaque permettant de trouver les modules de réaction du sol  $K_p$  et  $G_p$  du modèle de Pasternak en fonction de la demi-largeur de la charge  $b$  et de l'épaisseur du terrain  $h$  ( $E_t = 1 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ )

La valeur de  $K_w$  est indépendante de l'intensité de la charge. Pour d'autres valeurs du module de Young du terrain, il convient de multiplier les valeurs de  $K_w$  fournies par l'abaque, par le module de Young (Equ 18).

$$K_w(E_t) = K_w \cdot E_t \quad (18)$$

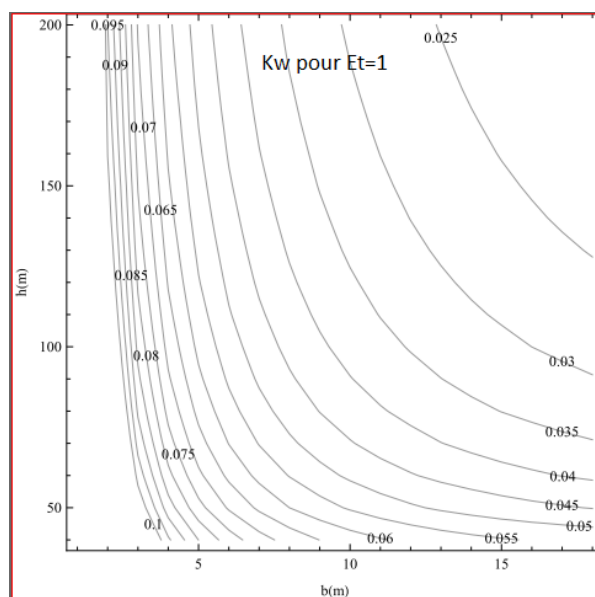


Figure 5 : Abaque permettant de trouver le module réaction de sol  $K_w$  du modèle de Winkler en fonction de la demi-largeur de la charge  $b$  et de l'épaisseur du terrain  $h$  ( $E_t = 1 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ )

#### 4. Exploitation du modèle analytique : comparaison entre le modèle de Winkler et le modèle de Pasternak

Après avoir défini de façon satisfaisante les 2 paramètres de Pasternak et la valeur du module de réaction de sol de Winkler afin que ces valeurs soient représentatives d'un même sol, on utilise ces paramètres dans nos calculs pour trouver la déflexion d'un bâti en zone de mouvement de terrain.

On a choisi des longueurs du bâtiment «  $L$  » comprises entre 7,5 et 40 m pour être représentatives d'un large éventail de longueur des bâtiments. La rigidité à la flexion du bâti  $EI$  est choisie entre 25000  $\text{MN.m}^2$  et 600000  $\text{MN.m}^2$ . Le module de Young du terrain  $E_t$  est choisi entre 25 et 600  $\text{MN/m}^2$ , correspondant respectivement à un sol déformable et un roche tendre. La charge appliquées sur le bâti est 100  $\text{kN/m}$ .

On trouve une différence significative entre les résultats de Winkler et ceux de Pasternak. L'influence de la déformée associée au cisaillement dans le sol est donc importante; elle doit être prise en compte pour calculer la déflexion finale d'un bâti dans une zone de mouvement de terrain. Les résultats obtenus avec le modèle de Pasternak montrent un taux de transmission de la déflexion plus important qu'avec le modèle de Winkler. Ceci s'explique par le fait que le tassement du terrain au centre du bâti s'accroît au fur et à mesure du tassement du terrain aux extrémités du bâti (influence des déformations de cisaillement).

Les valeurs de  $\Delta/\Delta_0$  se rapprochent de 1, pour des faibles valeurs de  $\rho^*$ , ce qui correspond au cas d'un bâti très souple sur un sol rigide. Inversement, la déflexion transmise devient quasiment nulle pour une valeur élevée de la rigidité relative, c'est à dire pour un bâti rigide en comparaison avec le terrain.

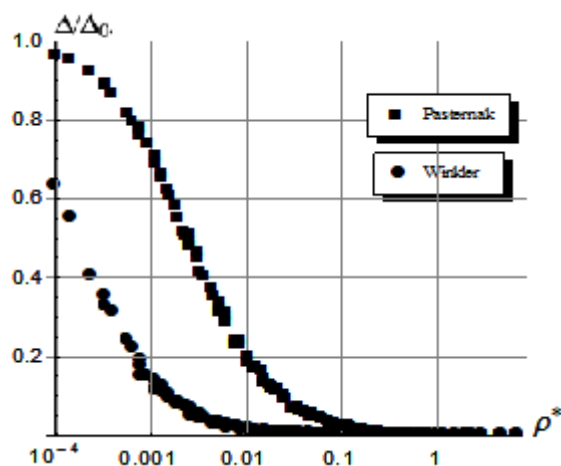


Figure 6 : Taux de transmission de la déflexion (axe vertical) pour les deux modèles analytiques de Pasternak et Winkler en fonction de  $\rho^* = EI/(8.Et.L3)$

Les calculs ont été menés en vérifiant que le contact sol-bâti était maintenu sur toute la longueur de la structure. Dans certaines situations, associées à un bâti très rigide et/ou une valeur initiale de  $\Delta_0$  importante, un vide pourrait se créer sous le bâti. Les calculs présentés sur la Figure 7 constituent ainsi une borne supérieure de la valeur de  $\Delta/\Delta_0$  puisque l'occurrence d'un décollement irait dans le sens d'une réduction de  $\Delta$  et donc de  $\Delta/\Delta_0$ .

## 5. Conclusion

Un modèle analytique a été développé en se basant sur le modèle analytique de Deck et Singh 2010. L'amélioration a concerné le modèle de terrain afin de tenir compte de l'influence des déformations associées au cisaillement pour le calcul du taux de déflexion d'un ouvrage impacté par des mouvements de terrains. Cela est rendu possible grâce au modèle de Pasternak, au lieu du modèle de Winkler dans le modèle analytique.

Pour ces deux modèles de sol, une méthodologie a été mise en œuvre afin de justifier les valeurs des paramètres en fonction des propriétés élastiques du sol.

La comparaison des résultats obtenus pour le modèle de Winkler et celui de Pasternak, modélisant un même sol, montre des résultats significativement différents qui justifient la nécessité de tenir compte du cisaillement pour une évaluation précise du taux de déflexion d'un bâti.

## Références bibliographiques

- Boscardin, M. and Cording, E. (1989). "Building Response to Excavation-Induced Settlement." J. Geotech. Engrg., 115(1), 1–21.
- Boussinesq.J.(1878). Equilibre d'élasticité d'un solide isotrope sans pesanteur ,supportant differents poids.Paris,Vol.86 . pp.1260-1263.

- Burland J.B, and Wroth C.P(1974) , Settlement of buildings and associated damage. Conference on the Settlement of Structures, Pentech Press, Cambridge, London ,pp. 611–654.
- Deck O., Singh A. (2010). Analytical model for the prediction of building deflections induced by ground movements. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, DOI: 10.1002/nag.993
- Finno, R. and Calvello, M. (2005). Supported Excavations: Observational Method and Inverse Modeling. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 131(7), 826–836.
- Flamant. A. (1892). Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *Compte. Rendu. Acad. Sci. Paris*, vol. 114, p. 1465.
- Goh, KH and Mair, RJ (2011) Building damage assessment for deep excavations in Singapore and the influence of building stiffness. *Geotechnical Engineering*, 42. pp. 1-12. ISSN 0046-5828
- Kratzsch (1983) Mining subsidence engineering
- Laefter, D. (2001) Prediction & Assessment of Ground Movement & Building Damage Induced by Adjacent Excavation. *Dissertations/Theses*
- Potts D.M., Addenbrooke T.I. (1997). A structure's influence tunneling-induced ground movements. *Proceedings Institution of Civil Engineers, Geotechnical Engineering*; 125:109–125.
- Son M. and Cording E. (2005). "Estimation of Building Damage Due to Excavation-Induced Ground Movements." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 131(2), 162–177.
- Son M. and Cording E. (2007). "Evaluation of Building Stiffness for Building Response Analysis to Excavation-Induced Ground Movements." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 133(8), 995–1002.
- Wagner H, Schumann HER (1991). Surface effect of total coal seam extractions by underground mining methods. *J S Afr Inst Min Metal* 91:221–231